GÜNTER TODT

Behandlung vager Prädikate in formalen Sprachen

0. In der Logik sind formale Sprachen konstruiert worden, um damit logische Schlußweisen präziser analysieren und darstellen zu können. Logische Folgerungen werden zum einen mit rein syntaktischen Verfahren – sog. Ableitungskalkülen – gewonnen, zum anderen mit Hilfe einer der Sprache zugeordneten Semantik.

In der Linguistik hat man versucht, natürliche Sprachen durch formale Sprachen und deren Grammatiken zu approximieren und hat dabei zunehmend auf Vorbilder aus der Logik zurückgegriffen, da diese Sprachen bereits über eine ausgearbeitete Semantik verfügen (vgl. [11]). Eine ausgezeichnete Rolle haben dabei neben der einfachen prädikatenlogischen Sprache sog. λ-kategoriale Sprachen gespielt, deren Semantik z.T. auch intensional gewählt wurde. Im allgemeinen wurde jedoch hier immer noch an dem Prinzip der Zweiwertigkeit der klassischen Logik festgehalten. Die Einbeziehung vager Prädikate in formale Sprachen stellte ein neues Problem dar und führte zu einer Reihe von Lösungsvorschlägen, die im folgenden in ihren wesentlichen Zügen dargestellt werden sollen.

Im ersten Abschnitt soll der Begriff der Vagheit eingegrenzt und präzisiert werden. Der zweite Abschnitt bringt einen kurzen Abriß der mehrwertigen (speziell der dreiwertigen) Prädikatenlogik, in der noch an der Extensionalität der Junktoren festgehalten wird. In der Supervaluations-Logik (dritter Abschnitt) gibt man das Prinzip der Extensionalität auf und ersetzt es durch eine Berechnung der Wahrheitswerte zusammengesetzter Aussagen mit Hilfe total präzisierter Prädikate in den Teilaussagen. Eine Variante stellt die Supervaluations-Logik mit Wahrscheinlichkeitskomponente dar, wobei zusätzlich eine Auswahl unter den totalen Präzisierungen mit Hilfe von Wahrscheinlichkeiten getroffen wird. Die Fuzzy-Logik (vierter Abschnitt) ist eine unendlichwertige Logik, in der dem Bereich der "Wahrheitswerte" eine zusätzliche Struktur aufgeprägt ist, um so graduell unterschiedliche Werte des Zutreffens von Prädikaten mit zu erfassen. Im allgemeinen wird das Intervall [0,1] von reellen Zahlen als Menge der "Wahrheitswerte" genommen, ohne daß jedoch diese Zahlen gleichzeitig als Wahrscheinlichkeiten für das Zutreffen eines Prädikats gelten sollen. Abschließend (fünfter Abschnitt) gehen wir noch auf die in diesem Band dargestellten Ansätze von Ballweg/Frosch und Pinkal ein und skizzieren einige Anforderungen an eine verbesserte Theorie.

1. Die Existenz vager Prädikate in natürlichen Sprachen dient als eines der Hauptargumente dafür, daß formale logische Sprachen, in deren Semantik an dem Prinzip der Zweiwertigkeit der klassischen Logik in der Weise festgehalten wird, daß jeder Aussage einer der Wahrheitswerte "wahr" oder "falsch" zugeordnet wird, als formale Approximation natürlicher Sprachen nicht adäquat sind. Bestimmten Aussagen der natürlichen Sprache soll demnach gemäß der intuitiven natürlichsprachlichen Semantik nicht in sinnvoller Weise einer der klassischen Wahrheitswerte zugeordnet werden können. Wir wollen kurz darlegen, inwiefern sich die intuitive Bewertung von der logischen Bewertung, wie sie in [9] beschrieben wird, unterscheidet. Betrachten wir den Beispielsatz

(1) *Peter ist groß.*

In der zweiwertigen (extensionalen) Prädikatenlogik erhält diese Aussage einen der beiden Wahrheitswerte W oder F nach Festlegung der Bedeutung der vorkommenden nichtlogischen Konstanten, in diesem Fall also, wenn durch eine Interpretation bestimmt ist, welches Individuum eines gewissen Bereiches mit dem Namen *Peter* bezeichnet wird und auf welche Individuen des Bereiches das Prädikat ... *ist groß* zutrifft (auf alle anderen Individuen des Bereiches trifft das Prädikat dann definitionsgemäß nicht zu).

Eigennamen von Personen sind insofern ambig, als sie nicht einer einzigen Person zugeordnet sind, sondern die Zuordnung Eigenname – Individuum erst durch den Kontext etc. vollständig bestimmt werden kann. Wir wollen hier den Begriff der Interpretation im weitesten Sinne gebrauchen, und zwar als Funktion, die Ausdrücken einer formalen Sprache gewisse Objekte zuordnet, die dann als Denotate bezeichnet werden. Soweit die Denotate abhängig sind vom Kontext oder der Situation, der möglichen Welt, dem Äußerungszeitpunkt etc., sind sie somit auch interpretationsabhängig. Wir lassen hier unberücksichtigt, in welcher Weise Interpretationen genau verwendet werden und von welchen Faktoren sie abhängen, da diese Probleme nicht für vage Prädikate spezifisch sind, sondern ein allgemeines semantisches Problem für natürliche Sprachen darstellen. Das Prädikat ... *ist Peter* ist also interpretationsabhängig, aber natürlich gilt dies auch für ... *ist groß* (z.B. groß für einen Elefanten, groß für eine Mücke (vgl. [10])).

Die Interpretationsabhängigkeit von Prädikaten ist auch in der zweiwertigen Logik gegeben. Sie ist von der Vagheit durchaus zu unterscheiden. Während in der formalen Sprache jedoch die Wahl der Zeichen für nichtlogische Konstanten völlig beliebig und willkürlich ist und deren Interpretation zunächst keinen Einschränkungen unterworfen ist, soll die

Interpretationsabhängigkeit der Ausdrücke von natürlichen Sprachen natürlich nicht so weit gehen, daß etwa ... *ist groß* genauso interpretiert wird wie ... *ist klein.* Gewisse Interpretationen sind in der natürlichen Sprache als sog. Standardinterpretationen ausgezeichnet. Die Unbestimmtheit, welche Interpretation zu wählen ist, ist nun kein besonderes Kennzeichen vager Prädikate, denn ein Prädikat wie ... *ist Peter* wird man nicht deshalb als vage bezeichnen, weil es interpretationsabhängig ist. Daß es in der natürlichen Sprache Sätze wie (1) gibt, die weder wahr noch falsch sind, weil in ihnen Prädikate vorkommen, die nicht hinreichend spezifiziert sind, vermag mit Hilfe von klassischen Interpretationen also so nachgezeichnet zu werden, daß es sowohl Standardinterpretationen, die den Satz mit "wahr", als auch solche, die den Satz mit "falsch" bewerten, gibt. Es wird somit in einer zweiwertigen Logik kein prinzipieller Unterschied zwischen Vagheit und Ambiguität gemacht. Ambiguitäten liegen vor, wenn man die Standardinterpretationen in Klassen einteilen kann, die jeweils mögliche Desambiguierungen eines Ausdrucks liefern. Vagheiten liegen vor, wenn man die Standardinterpretationen so in Klassen einteilen kann, daß sich daraus die unbestimmten Fälle der Prädikate ergeben.

Wir haben eben vage Prädikate dadurch charakterisiert, daß sie nicht hinreichend spezifiziert sind. Dadurch, daß solche Prädikate wie total spezifizierte Prädikate bewertet werden, geht die inhärente Unbestimmtheit jedoch nicht verloren, da ja weiterhin nicht eine einzige präzise Interpretation ausgezeichnet wird. Die mögliche Inadäquatheit besteht lediglich darin, daß ein Prädikat wie ... *ist groß* grundsätzlich verschieden ist von Präzisierungen wie ... *ist mindestens 1,72 m groß* oder ... *ist mindestens 1,8015 m groß.*

Die Unbestimmtheit der Zutreffensrelation von Prädikaten, die nicht hinreichend spezifiziert sind, wird häufig verwechselt mit einer epistemischen Unbestimmtheit.

(2) *Peter ist mindestens 1,8015 m groß.*

(3) *Vor 3000 Jahren stand genau an dieser Stelle ein Baum.*

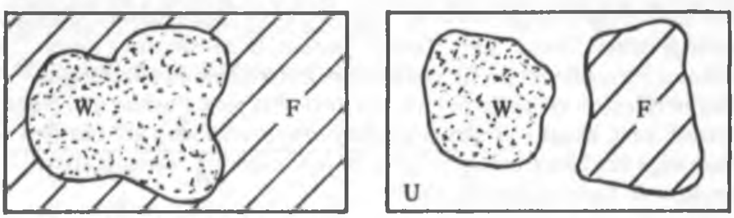
Auch wenn keine Methoden vorhanden sind, die Wahrheitswerte von (2) und (3) zu bestimmen, so liegt ihr Wahrheitswert dennoch (nach Auszeichnung einer Interpretation, Angabe eines Meßverfahrens etc.) "an sich" fest. Prädikate können also präzise sein, ohne daß es dem Sprachbenutzer möglich ist, die Prädikation eindeutig vorzunehmen. (Natürlich zeigt eine genauere Analyse, daß im Grunde genommen jeder empirische Begriff vage ist.) Wir wollen die Vagheit also sowohl abheben von der Unbestimmtheit der Wahrheitswertzuweisung aufgrund von Interpretationsabhängigkeiten als auch von der epistemischen Unbestimmtheit von Prädikaten. Die intuitive Bewertung von Aussagen durch den Sprachbenutzer ist also für die Wertzuweisung einer logischen Sprache nicht das entscheidende Kriterium. Ebenso darf nicht angenommen werden, daß etwa Extensionen und Intensionen mehr als eine Approximation an den intuitiven Bedeutungsbegriff wären. Eine totale Anpassung der logischen Semantik z.B. an psychologische Intuitionen von Sprechern würde ein Aufgeben des logischen Charakters der formalen Sprache bedeuten.

Wir nennen noch einmal den Hauptvorwurf, der gegen eine zweiwertige Semantik erhoben wird: Eigentlich vage Begriffe werden künstlich verschärft und dadurch die Sprache in nicht adäquater Weise verändert. Wir werden sehen, daß keiner der anderen Ansätze ohne eine vergleichbare Verschärfung auskommt. U. Blau (vgl. [2]) nennt dieses Phänomen das Vagheitsdilemma der natürlichen Sprache. Sprache und sprachliche Intuition lassen sich offensichtlich nicht voll durch mengentheoretische Modelle erfassen (jedenfalls bisher).

2. Der Ansatz der mehrwertigen Logik soll am einfachsten Beispiel, dem der dreiwertigen Logik, analysiert werden. In einer dreiwertigen Logik wird ein Prädikat durch einen Positiv- und einen Negativbereich bewertet.

Wir veranschaulichen die Verhältnisse:

zweiwertig dreiwertig



... ist groß *... ist groß*

Gegenüber einer entsprechenden zweiwertigen Interpretation wird also der Bereich der Individuen, auf die das Prädikat zutrifft, im allgemeinen etwas kleiner, da eine Präzisierung noch einige Grenzfälle mit erfaßt. Ebenso wird der Bereich der Individuen, auf die das Prädikat nicht zutrifft, etwas kleiner. Statt dessen tritt ein dritter Bereich von Individuen auf, für die die Prädikation unbestimmt ist. In der dreiwertigen Logik soll also adäquater nachgezeichnet werden, daß Prädikate im allgemeinen nicht so weit spezifiziert sind, daß sie zu einer Zweiteilung des Individuenbereichs führen.

Zum Vagheitsdilemma gehört sicher, daß bei einer dreiwertigen Interpretation der eine scharfe Schnitt, den die klassische Logik setzt, durch zwei ebenso scharfe Schnitte ersetzt wird. Ein eigentlich nicht vollständig spezifiziertes Prädikat wird jetzt so interpretiert, daß genau festgelegt ist, auf welche Individuen das Prädikat eindeutig zutrifft, auf welche es eindeutig nicht zutrifft und für welche weder von eindeutigem Zutreffen noch von eindeutigem Nicht-Zutreffen geredet werden kann. Man beachte, daß hier Prädikate so behandelt werden, als wären sie vollständig spezifiziert (und zwar mit Hilfe von drei Werten). Dies bedeutet jedoch nicht, daß sich damit eindeutig etwa die Grenzfälle eines Prädikates ermitteln ließen. Auch in der dreiwertigen Logik bleibt nämlich die Interpretationsabhängigkeit der Werte bestehen. Wir wollen der Deutlichkeit halber die beiden Standpunkte noch einmal miteinander vergleichen:

In der zweiwertigen Logik wird akzeptiert, daß es in der natürlichen Sprache Prädikate gibt, die nicht genügend spezifiziert sind und daher nicht ohne weiteres zweiwertig interpretiert werden dürfen. Eine Lösung wird darin gesehen, daß je nach Interpretation eine andere Präzisierung gewählt wird. Die intuitive Zuordnung des Wahrheitswertes "unbestimmt" wird so gedeutet, daß es Präzisierungen gibt, die den Wahrheitswert "wahr", aber auch solche, die den Wahrheitswert "falsch" liefern, und die Bedeutung des Prädikates liefert keine Kriterien, welche Präzisierungen vorzuziehen sind.

In der dreiwertigen Logik wird der intuitive Wert "unbestimmt" gleichberechtigt neben "wahr" und "falsch" gestellt. Die Bedeutung eines Prädikates liefert Kriterien für eindeutiges Zutreffen und eindeutiges Nichtzutreffen, es verbleibt jedoch ein Rest. Wie groß Positiv- und Negativbereich sind, hängt von den gewählten Interpretationen ab. Insofern bleiben vage Prädikate unscharf, obwohl jede einzelne Interpretation ihnen scharfe Bedeutungen zuweist.

Die eigentlichen Probleme beginnen jedoch erst, wenn man die prädikativen Aussagen miteinander verknüpfen oder quantifizieren will und so zu einer prädikatenlogischen Sprache mit dreiwertiger Semantik kommt. Wir gehen zunächst auf die Aussagenlogik ein. Kennzeichen der logischen Aussagenverknüpfungen (Junktoren) ist es, daß deren Bedeutung extensional ist, d.h. der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage hängt stets nur von den Wahrheitswerten der Teilaussagen ab. Die Junktoren werden also durch Funktionen interpretiert, die Wahrheitswerte in Wahrheitswerte überführen (sog. Wahrheitstafeln). In der (klassischen) dreiwertigen Logik wird an der Extensionalität der Junktoren festgehalten.

Außerdem sollen die Wahrheitstafeln Erweiterungen der entsprechenden Wahrheitstafeln der zweiwertigen Logik sein. Alle darüber hinausgehenden Forderungen sind mehr oder weniger konventionell.

Wir geben eine mögliche Wahrheitstafel für die Konjunktion an:

p	q	$p \wedge q$
W	W	W
F	W	F
U	W	U
W	F	F
F	F	F
U	F	F
W	U	U
F	U	F
U	U	U

Die Wahrheitstafel läßt sich folgendermaßen rechtfertigen. W wird als der maximale und F als der minimale Wert angesehen. Die Konjunktion von zwei Wahrheitswerten gibt dann das Minimum der beiden Werte an. Es erscheint fraglich, ob die natürlichsprachliche Intuition so weit reicht, daß diese Wahrheitstafel als einzige für die Konjunktion akzeptabel ist, oder ob die Konjunktion einer falschen und einer unbestimmten Aussage nicht auch unbestimmt sein kann.

Wir geben einige weitere Wahrheitstafeln an:

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \supset q$
W	W	W	W	W
F	W	W	W	W
U	W	W	W	W
W	F	W	F	F
F	F	F	W	W
U	F	U	U	W
W	U	W	U	U
F	U	U	W	W
U	U	U	W	W

p	$\neg p$	$\sim p$	$J_W\, p$	$J_F\, p$	$J_U\, p$	$U p$
W	F	F	W	F	F	U
F	W	W	F	W	F	U
U	U	W	F	F	W	U

$p \vee q$ ist die Disjunktion, $p \rightarrow q$ und $p \supset q$ sind zwei mögliche Implikationen, $\neg\, p$ und $\sim p$ sind zwei mögliche Negationen, $J_W\, p$, $J_F\, p$ und $J_U\, p$ sind die charakteristischen Funktionen für die drei Wahrheitswerte, und zu $U\, p$ gehört eine Wahrheitstafel, die kein Pendant in der zweiwertigen Logik hat. Eine Reihe von Prinzipien können aus der zweiwertigen Logik übernommen werden. Dabei ist natürlich darauf zu achten, in welcher Weise die Wahrheitstafeln angemessen zu erweitern sind. So gilt: $(p \wedge q) \longleftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$; $\neg\neg p \longleftrightarrow p$; $(p \rightarrow q) \longleftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$. Das "tertium non datur" gilt in der Form $p \vee \sim p$ oder als "quartum non datur" in der Form $J_W\, p \vee J_F\, p \vee J_U\, p$. Der Modus ponens gilt in den beiden folgenden Versionen: a) wenn $p \rightarrow q$ (bzw. $p \supset q$) und p wahr sind, so auch q; b) wenn $p \supset q$ und p wahr oder unbestimmt sind, so auch q. Es ist bekannt, daß sich in der zweiwertigen Logik alle Junktoren (die überhaupt denkbar sind) mit Hilfe von $\neg$ und $\rightarrow$ ausdrücken lassen. Eine entsprechende funktionale Vollständigkeit läßt sich auch für die dreiwertige Aussagenlogik erzielen; denn alle Junktoren lassen sich mit $\neg$, $\rightarrow$ und U ausdrücken.

Unsere kurze Darstellung der dreiwertigen Aussagenlogik sollte demonstrieren, daß es sich hierbei durchaus um ein ausgearbeitetes logisches System handelt, so daß die Einführung eines dritten Wahrheitswertes nicht mit dem Verzicht auf eine logische Semantik verbunden zu sein braucht. Problematischer ist jedoch, welchen Bezug diese formale Theorie zum natürlichsprachlichen Verständnis der logischen Partikeln hat. In [2] ist dargestellt, bis wie weit sich ein Teilsystem der hier entwickelten dreiwertigen Logik auch als Logik für die natürliche Sprache rechtfertigen läßt.

Das Prinzip der Extensionalität der Junktoren findet seine Fortsetzung bei der Einführung von Quantoren in die dreiwertige Prädikatenlogik. Quantifizierte Formeln können bei verschiedenen Interpretationen alle drei Wahrheitswerte annehmen, aber die einzelnen Fälle sind klassisch zweiwertig beschreibbar. Natürlich sollen die klassischen Quantoren $\forall$ (für alle), $\exists$ (es gibt) ein Analogon in der dreiwertigen Logik haben. Es ist vernünftig festzusetzen, daß die Formel $\forall x\, \phi$ genau dann den Wert W in einer Interpretation bekommt, wenn die Formel ϕ bei dieser Interpretation und bei allen möglichen Werten der Variablen x stets den Wert W bekommt. $\forall x\, \phi$ erhält den Wert U, wenn ϕ wenigstens einmal den Wert U aber niemals den Wert F erhält. Wenn ϕ wenigstens einmal den Wert F erhält, so erhält $\forall x\, \phi$ ebenfalls den Wert F.

(4) *Alle Elefanten sind groß.*

Dieser Satz erhält also bei einer Interpretation genau dann den Wert "unbestimmt", wenn man zwar nicht allen Elefanten das Prädikat ... *ist groß* zuspricht, es andererseits aber auch keinem eindeutig abspricht.

Wenn wir wieder W als den maximalen und F als den minimalen Wahrheitswert ansehen, so spiegelt die Bewertung von $\forall x\, \phi$ wider, daß es sich bei All-Formeln um unendlich iterierte Konjunktionen handelt. Die Formel $\exists x\, \phi$ erhält entsprechend bei einer Interpretation den größten Wert, den ϕ bei den verschiedenen Denotaten von x annimmt.

Vage Quantoren wie "fast alle", "viele", "wenige" etc. können ähnlich behandelt werden wie vage Prädikate. Da vage Prädikate so bewertet werden, als wären es total spezifizierte dreiwertige Prädikate, operieren vage Quantoren in der Weise auf Formeln, als wären die Quantifizierungen total spezifiziert mit Hilfe von drei Werten.

(5) *Fast alle Basketballspieler sind groß.*

Dieser Satz könnte in einer Interpretation z.B. den Wert "unbestimmt" bekommen, wenn die relative Anzahl der Basketballspieler, für die das Prädikat ... *ist groß* die Werte W oder U liefert, nicht hoch genug ist, um dem Standard von *fast alle* zu genügen; andererseits aber auch die relative Zahl der Spieler, die eindeutig nicht groß sind, nicht ausreicht, um (5) mit F zu bewerten.

Neben solchen einstelligen Quantoren werden auch mehrstellige Quantoren, in deren Skopus darüber hinaus noch mehr als eine Formel stehen kann, zugelassen. Es können also Formeln der Art

$$Q\, x_1 \dots x_m \quad \phi_1 \dots \phi_n$$

gebildet werden.

Wir betrachten einen Spezialfall für m = 2 und n = 1. Der Quantor $\exists\!\!\forall$, mit dem man Formeln der Art $\exists\!\!\forall\, x\, y\, \phi$ bilden kann, möge die folgende Bedeutung haben: Die Formel $\exists\!\!\forall\, x\, y\, \phi$ erhält den Wert W, wenn $\exists x\, \forall y\, \phi$ den Wert W erhält; $\exists\!\!\forall\, x\, y\, \phi$ erhält den Wert U, wenn $\neg \exists x\, \forall y\, \phi \vee \forall y\, \exists x\, \phi$ den Wert W oder U erhält, ansonsten wird $\exists\!\!\forall\, x\, y\, \phi$ mit F bewertet. Der Quantor mag nützlich sein, um Sätze vom folgenden Typ zu formalisieren:

(6) *Einen lieben alle.*

Eine Unbestimmtheit kommt bei diesem Satz nicht nur dadurch hinein, daß das Prädikat ... *liebt* ... vage ist, sondern auch, weil nicht präzisiert zu sein braucht, ob alle denselben lieben oder nur jeder irgendeinen liebt.

Wir halten zum Abschluß noch einmal fest, daß mögliche Inadäquatheiten der Behandlung vager Prädikate in einer dreiwertigen Logik mit extensionalen Junktoren nicht darin bestehen, daß es nicht eine einheitliche logische Semantik für derartige Systeme gäbe, sondern höchstens darin, daß vage Prädikate natürlicher Sprachen nicht gleichzusetzen sind mit präzisen dreiwertigen Prädikaten und daß die Bedeutung der natürlichsprachlichen Ausdrücke im Grunde genommen nicht ausreicht, um eine Auswahl unter den konkurrierenden Denotaten und ebensowenig unter den konkurrierenden Systemen zu treffen. Bei der Darstellung der mehrwertigen Logik haben wir eine zweiwertige Beschreibungssprache benutzt, so daß sich die mehrwertige Logik wohl auch in einer zweiwertigen formalen logischen Sprache darstellen läßt. Es ist daher zusätzlich zu fragen, ob eine dreiwertige Logik nur aus pragmatischen Gründen gewählt wird, oder ob sie genuin notwendig ist.

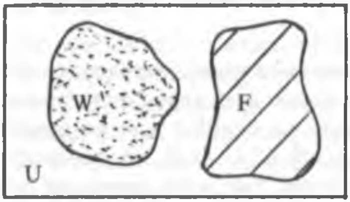
3. In der Supervaluations-Logik werden vage Prädikate wieder wie total präzisierte dreiwertige Prädikate bewertet. Darüber hinaus werden aber auch mögliche zweiwertige Präzisierungen der Denotate mit zur Bewertung herangezogen. Die zweiwertigen Interpretationen werden also nicht als grundlegend wie in der klassischen Logik, aber als eine wesentliche Komponente für die Bewertung zusammengesetzter Aussagen angesehen.

(7) *Peter ist groß und klein.*

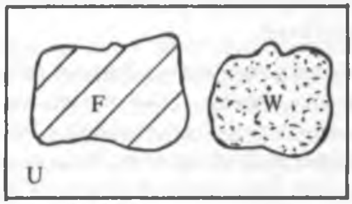
Um diesen Satz angemessen bewerten zu können, beschränken wir uns zunächst auf solche Interpretationen, in denen die Prädikate ... *ist groß* und ... *ist klein* konträr zueinander sind. Damit werden zumindest alle Interpretationen ausgeschlossen, bei denen (7) den Wert W erhält (Peter ist einerseits groß (z.B. für einen Elfjährigen), aber andererseits auch klein (in seiner Basketballmannschaft)).

Nun gibt es sicher Interpretationen (bei Voraussetzung einer dreiwertigen Logik), bei denen die Teilaussagen *Peter ist groß* und *Peter ist klein* beide den Wert "unbestimmt" erhalten und die Aussagenverknüpfung im Sinne des logischen $\wedge$ interpretiert wird, so daß bei Verwendung der dreiwertigen Wahrheitstafel für $\wedge$ der Satz (7) den Wert U erhält. Dem steht gegenüber, daß in den zugelassenen Standardinterpretationen die beteiligten Prädikate konträr sind, so daß jede zweiwertige Präzisierung den Wahrheitswert F liefern würde. Der Satz (7) sollte also in diesem Fall sinnvollerweise den Wert F bekommen, obwohl beide Teilaussagen unbestimmt sind. Gestützt wird dies Argument durch das Anführen der natürlichen Bedeutung von (7). Die beiden beteiligten Prädikate sind vage, aber sie sind nicht so vage, als wäre es noch unbestimmt, daß beide zugleich auf ein und dasselbe Individuum zutreffen könnten. Derartige Beziehungen von Prädikaten untereinander sorgen dafür, daß die Extensionalität der Junktoren nicht aufrechterhalten werden kann.

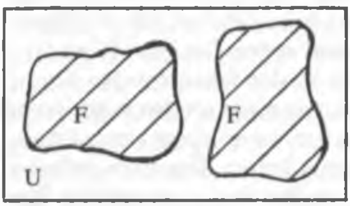
Wir stellen die beiden Bewertungsvorschläge einander gegenüber:



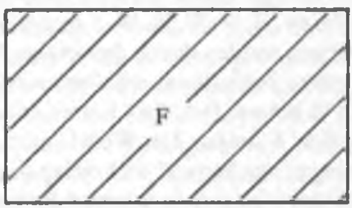
... ist groß



... ist klein



... ist groß und klein
(klassisch dreiwertig)



... ist groß und klein
(supervaluations-dreiwertig)

Falls jedoch Prädikate verwendet werden, die durch keine derartigen Beziehungen miteinander verbunden sind, so liefern beide Ansätze dieselbe Bewertung.

(8) *Peter ist groß und traurig.*

Die Bewertung von (8) unterscheidet sich im Endergebnis nicht darin, ob *und* mit Hilfe der Wahrheitstafel oder mit Hilfe totaler Präzisierungen der Prädikate bewertet wird.

Wir haben soweit informell beschrieben, in welcher Weise mit Hilfe von zweiwertigen und dreiwertigen Bewertungen eine neuartige Bewertung molekularer Aussagen vorgenommen werden kann. Die formale semantische Theorie der Supervaluations-Logik geht ganz entsprechend vor. Eine Interpretation legt dreiwertige Denotate von Prädikaten fest und zusätzlich eine Reihe von Präzisierungen. Die Präzisierungen sind derart, daß einige Fälle, für die das Prädikat nicht eindeutig bestimmt ist, jetzt zu eindeutigen Fällen geworden sind. Der Einfachheit halber wollen wir hier nur den Fall betrachten, daß die Präzisierungen stabil sind in der Weise, daß die eindeutigen Zuordnungen W, F nicht mehr umgestoßen werden und daß es sich zusätzlich stets um totale, also zweiwertige Präzisierungen handeln soll. Wichtig ist, daß jeweils eine Interpretation aller Prädikate vorgenommen wird, so daß die Präzisierung eines Prädikates Konsequenzen für die Präzisierung eines anderen Prädikates nach sich ziehen kann.

In einem konstruierten Beispiel nehmen wir einen Individuenbereich mit fünf Personen a_1 , ..., a_5, die wir uns der Größe nach angeordnet denken, und eine Interpretation, die den Individuen das Prädikat ... *ist groß* nacheinander in der folgenden Weise zuspricht: W, U, U, U, F. Für das Prädikat ... *ist klein* lauten die Werte F, U, U, W, W. Totale Präzisierungen von ... *ist groß* mögen gegeben sein durch W, W, W, F, F bzw. W, W, F, F, F bzw. W, F, F, F, F. Die dazugehörigen Präzisierungen von ... *ist klein* sind bestimmt durch die Folge von Werten F, F, F, W, W bzw. F, F, W, W, W bzw. F, W, W, W, W. Supervaluation bedeutet nun, daß die Werte bestimmt werden durch die totalen Präzisierungen. Der Wert W wird bei einem Individuum erhalten, wenn alle totalen Präzisierungen den Wert W liefern. Der Wert F wird erhalten, wenn alle totalen Präzisierungen den Wert F liefern. Der Wert U wird erhalten, wenn einige totale Präzisierungen den Wert W und einige den Wert F liefern. Demnach ordnet die Supervaluation in unserem Beispiel dem Prädikat ... *ist groß* die Werte W, U, U, F, F zu, dem Prädikat ... *ist klein* die Werte F, U, U, W, W und dem zusammengesetzten Prädikat ... *ist groß und klein* die Werte F, F, F, F, F.

Im Unterschied zu reinen zweiwertigen Interpretationen dienen hier die totalen Präzisierungen nur als Hilfsmittel und sind als eigentliche Interpretationen nicht zugelassen. In unserem konstruierten Beispiel trat der Fall auf, daß auch die Bewertung für ein unzusammengesetztes Prädikat durch die Supervaluation noch geändert wurde (die Aussage a_4 *ist groß* erhält nach der Supervaluation den Wert F, da es nur diese eine Präzisierung für den Wert "unbestimmt" gab). Derartiges dürfte in der Regel bei Standardinterpretationen nicht anzutreffen sein, so daß dann für diese Prädikate tatsächlich die Supervaluation mit der normalen dreiwertigen Bewertung übereinstimmt.

Die Supervaluations-Logik benutzt dasselbe Verfahren wie die zweiwertige Logik, um den Wert "unbestimmt" zu rechtfertigen. Dieser Wert wird für ein vages Prädikat erhalten, wenn es Interpretationen gibt, die den Wert W, und solche, die den Wert F liefern. Der Unterschied zwischen den beiden Theorien besteht lediglich darin, daß in der Supervaluations-Logik diese Interpretationen uneigentlich sind und durch eine Klasseneinteilung zu den eigentlichen (dreiwertigen) Interpretationen führen. Die Rekonstruktion dieses Verfahrens in einer zweiwertigen Logik kann so geschehen, daß jetzt die eigentlichen (zweiwertigen) Interpretationen dazu benutzt werden, um uneigentliche (dreiwertige) Interpretationen zu erhalten.

Wir haben bisher in unseren Beispielen nur den Positiv von Adjektiven wie *groß, klein, traurig* betrachtet. Eine zusätzliche Aufgabe besteht nun darin, die wechselseitige Beziehung zwischen Positiv und Komparativ bei Adjektiven durch eine geeignete Semantik offenzulegen. Bei den totalen Präzisierungen eines dreiwertigen Denotats sind in der Regel nicht alle kombinatorisch denkbaren Fälle zugelassen, da auch ein vages Prädikat dem Individuenbereich eine Ordnungsstruktur aufprägt. So trat in unserem konstruierten Beispiel eine Präzisierung von ... *ist groß* mit den Werten W, F, W, F, F nicht auf; das liegt offensichtlich daran, daß das Individuum a_2 größer ist als das Individuum a_3, obwohl für beide die Prädikation *groß* unbestimmt ist. Diese zusätzlichen Beziehungen zwischen Individuen, die durch den Komparativ erfaßt werden, lassen sich auch so beschreiben, daß in unserem Beispiel das total präzisierte Prädikat ... *ist groß* relativ häufiger auf a_2 als auf a_3 zutrifft. Verallgemeinert man den Begriff der relativen Häufigkeit zum Begriff der Wahrscheinlichkeit, so läßt sich dies auch so ausdrücken, daß die Wahrscheinlichkeit, daß eine total präzisierte Version von ... *ist groß* auf a_2 zutrifft, höher ist als die Wahrscheinlichkeit, daß diese auf a_3 zutrifft. In der Supervaluations-Logik mit Wahrscheinlichkeitskomponente wird diese Beobachtung zum Anlaß genommen, auf den totalen Präzisierungen ein Wahrscheinlichkeitsmaß einzuführen und so den Komparativ von Adjektiven mit Hilfe des Positivs zu bewerten. Ersichtlich ist, daß dies Ergebnis zunächst nur für die Individuen zu erzielen ist, die zu den unbestimmten Fällen beim Positiv zählen, denn nur dort unterscheiden sich ja die Präzisierungen voneinander. Aus diesem Grunde muß das Prinzip fallengelassen werden, daß die Präzisierungen die definiten Werte W und F nicht mehr verändern sollen. In unserem kleinen Beispiel hat dies zur Folge, daß auch durch F, F, F, F, W eine Präzisierung von F, U, U, W, W erfolgen kann.

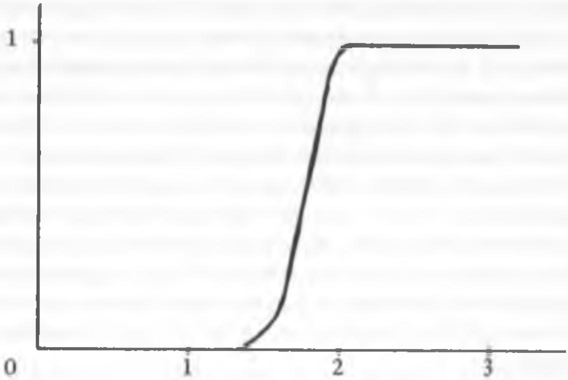
Wir fassen die semantische Theorie der Supervaluations-Logik mit Wahrscheinlichkeitskomponente noch einmal zusammen. Ein vages Prädikat wird wie ein total spezifiziertes dreiwertiges Prädikat bewertet. Daneben werden noch zweiwertige Präzisierungen betrachtet, die auch die definiten

Werte W, F noch verändern können. Auf diesen Präzisierungen nimmt ein Wahrscheinlichkeitsmaß eine Bewertung vor, die Einfluß hat auf die Wahrscheinlichkeit für die Wahrheit von Sätzen, in denen das Prädikat vorkommt. Die Supervaluation liefert damit im allgemeinen ein ganzes Spektrum von Werten, die durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung bereitgestellt werden. Zusätzlich ergibt sich aus diesen Werten eine Semantik für den Komparativ von Adjektiven.

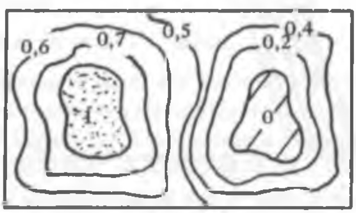
Es ist zu fragen, ob die Einführung der Wahrscheinlichkeitskomponente wirklich notwendig ist, um den Komparativ von Adjektiven mit behandeln zu können. Wenn zu einer Interpretation eine Klasse von totalen Präzisierungen angegeben ist, so läßt sich daraus vollständig rekonstruieren, in welcher Weise diese Präzisierungen Schritt für Schritt vorgenommen worden sind, und daraus ergibt sich vollständig ein Denotat für den Komparativ des betreffenden Adjektivs (siehe [13]). Daß die Zurückführung des Komparativs auf den Positiv gelingt, ist also nicht so sehr verwunderlich, da im Grunde genommen die Denotate bereits Werte für den Komparativ sind.

4. In der Fuzzy-Logik geht man davon aus, daß es nicht ausreicht, daß die Prädikationsbeziehung mit endlich vielen Werten erfaßt wird, da die Anzahl der für ein Prädikat zu unterscheidenden Fälle beliebig groß sein kann. Zusätzlich macht man davon Gebrauch, daß die "Wahrheitswerte" wie in der endlichwertigen Logik linear angeordnet werden können. Als klassische Wahrheitswerte werden die Zahlen 0 (für "falsch") und 1 (für "wahr") genommen. Als Bereich aller "Wahrheitswerte" dient dann das abgeschlossene Intervall [0,1] von reellen Zahlen. Weitere Verallgemeinerungen werden in [4] besprochen, jedoch wird in den eigentlichen Anwendungen der Fuzzy-Logik stets mit [0,1] als Wertebereich gearbeitet.

Um eine Interpretation des Prädikates ... *ist groß* im Sinne der Fuzzy-Logik anzugeben, beschränken wir uns zunächst darauf, daß die Angabe der Länge des jeweils betrachteten Individuums dazu ausreicht, um anzugeben, bis zu welchem Grade das Prädikat auf dies Individuum zutrifft. Die Interpretation des Prädikats ist also vollständig beschrieben, wenn eine Funktion gegeben ist, die jeder positiven reellen Zahl (die etwa für eine entsprechende Längenangabe in Metern steht) eine Zahl aus dem Intervall [0,1] zuordnet. Da das Prädikat ... *ist groß* auf eine Person zu einem höheren Grade zutreffen soll, wenn diese größer als eine andere ist, muß die erwähnte Funktion monoton sein. Der Graph möge etwa folgendermaßen aussehen:



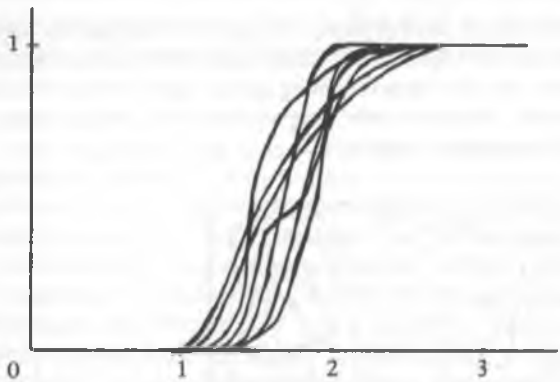
Die Interpretation des Prädikats ... *ist groß* erfolgt nun so, daß die obige Funktion auf die Maßzahl der Länge jedes Individuums angewendet wird. Wir wollen eine Veranschaulichung geben, indem wir die Individuen, denen derselbe "Wahrheitswert" zugeordnet wird, uns auf einer sog. "Höhenlinie" angeordnet denken.



... *ist groß*

Ein vages Prädikat soll also gemäß der Fuzzy-Logik wie ein mit Hilfe von kontinuierlich vielen Werten total spezifiziertes Prädikat bewertet werden. Nun sieht sich diese Art der Bewertung natürlich genau derselben Kritik ausgesetzt wie die anderen von uns erwähnten Theorien, nämlich inwieweit sich die präzise Zuordnung eines Wertes überhaupt bei einem vagen Prädikat rechtfertigen läßt. Es ist doch die Zuordnung umso präziser zu nennen, je mehr Werte zur Auswahl stehen. Wir haben bereits gesehen, daß alle bisher betrachteten Theorien denselben Ausweg aus dem Vagheitsdilemma gesucht haben, wie bereits die klassische zweiwertige Logik, indem die Vagheit eines Prädikates in der semantischen Theorie vollständig nur so aufrecht erhalten werden kann, wenn man nicht nur eine Standardinterpretation des Prädikates zuläßt. Die Fuzzy-

Logik ist mit dem Anspruch angetreten, daß die Bewertung durch fuzzy Mengen der natürlichen Bewertung am nächsten kommt und so eigentlich nicht der Kunstgriff verschiedenartiger Standardinterpretation angewendet zu werden braucht. Da sich aber zum Beispiel die besondere Art einer Längenfunktion für das Prädikat ... *ist groß* in keinerlei Weise rechtfertigen läßt, und sich ebensowenig bestimmte "Wahrheitswerte", die einer Prädikation zugeordnet werden, als allein möglich begründen lassen, verbleibt auch für diese Theorie nur der oben beschriebene Ausweg, hier natürlich in der Weise formuliert, daß die speziellen Bewertungen selbst fuzzy Konzepte sind. So ist statt der einen exakten Längenfunktion eine fuzzy Längenfunktion zu wählen, die man sich als Familie von exakten Längenfunktionen gebildet denken kann und die folgendermaßen zu veranschaulichen ist:



Aber sind derartige Bewertungen überhaupt noch praktikabel? Wenn diese Funktionenfamilie den ganzen Bereich überdeckt, so müssen darunter solche Funktionen sein, die auch das größte Individuum als beliebig klein bezeichnen. Diese Tatsache ist vergleichbar damit, daß auch in der Supervaluations-Logik mit Wahrscheinlichkeitskomponente (uneigentliche) Interpretationen auftreten, bei denen Individuen als eindeutig *nicht groß* bezeichnet werden, obwohl sie in der eigentlichen dreiwertigen Interpretation bereits als *groß* galten. Wenn aber nicht der gesamte Bereich überdeckt wird, so tauchen Ränder der Überdeckung auf, deren präzise Angabe sich im Grunde genommen nicht rechtfertigen läßt. In diesem Fall müßten eigentlich diese Ränder aufs Neue "fuzzy" gemacht werden. Ein Ende dieser Fuzzyfizierung scheint dann nicht mehr abzusehen zu sein. Die formale Theorie muß also diese Schwachpunkte in Kauf nehmen, wenn an dem zunächst intuitiv durchaus überzeugenden

Argument festgehalten werden soll, daß vage Prädikate, obwohl nicht total spezifiziert, dennoch zu einer Ordnung innerhalb des Individuenbereiches führen, die sich mit Hilfe einer graduellen Zutreffensrelation beschreiben läßt. Aber ist das Vorliegen einer Ordnung innerhalb des Individuenbereichs wirklich Grund genug dafür, eine Fuzzyfizierung der Elementbeziehung vorzunehmen? Nehmen wir als ein Beispiel die mathematisch präzise $>$-Relation auf natürliche Zahlen. Sie läßt sich im Sinne der Fuzzy-Logik natürlich auch erhalten, wenn man zunächst ein vages Prädikat ... *ist groß* für natürliche Zahlen einführt und dies z.B. so bewertet, daß der Zahl n der "Wahrheitswert" $1-\frac{1}{n}$ zugeordnet wird. Die Ordnung der "Wahrheitswerte" bestimmt dann die $>$-Relation auf den natürlichen Zahlen.

Viele Adjektive oder allgemeiner viele Ausdrücke der natürlichen Sprache, die zu einstelligen Prädikaten führen, lassen sich mit Hilfe einer Skalierung beschreiben. Ebenso wie man z.B. statt (1) die präzisere Aussage

(8) *Peter ist 1,82 m groß.*

nehmen kann, so läßt sich

(9) *Heute ist es warm.*

präzisieren zu

(10) *Heute ist es 34^{0} C warm.*

Dennoch braucht doch die Existenz von Skalen nicht dazu zu führen, von ihrer besonderen Beschaffenheit zu abstrahieren und sie zu einer einzigen "logischen" Skala zusammenzufassen. Der Anspruch, daß den "Wahrheitswerten" in der Fuzzy-Logik ein logischer Charakter zukommt, birgt die Verpflichtung in sich, dafür auch eine wirkliche Logik aufzubauen.

Wir gehen zunächst auf Junktoren ein, für die eine Reihe von Bewertungsfunktionen angegeben werden. Der Wahrheitswert von p bei der Interpretation J werde mit p^J bezeichnet. Dann ist festgelegt:

$(p \wedge q)^J = \min (p^J, q^J)$,

$(p \cdot q)^J = p^J \cdot q^J$,

$(p \vee q)^J = \max (p^J, q^J)$,

$(p \,\hat{\cdot}\, q)^J = p^J + q^J - p^J \cdot q^J$,

$(\neg p)^J = 1 - p^J$,

$$(J_F\, p) = \begin{cases} 1, \text{ falls } p^J = 0, \\ 0 \text{ sonst,} \end{cases}$$

$$(p \Rightarrow q)^J = \begin{cases} \frac{q^J}{p^J}, \text{ falls } q^J < p^J \\ 1 \text{ sonst.} \end{cases}$$

$$(p \rightsquigarrow q)^J = \begin{cases} 0, \text{ falls } q^J < p^J \\ 1 \text{ sonst.} \end{cases}$$

(Wir haben z.T. andere Bezeichnungen, als sie in der Fuzzy-Logik üblich sind, gewählt, um Verwechslungen mit den Zeichen der anderen logischen Systeme dort zu vermeiden, wo die Terminologie nicht kohärent ist).

$\wedge$ und $\cdot$ sind mögliche Konjunktionen, $\vee$ und $\hat{+}$ sind mögliche Disjunktionen, $\neg$ und J_F sind mögliche Negationen, $\Rightarrow$ und $\rightsquigarrow$ sind mögliche Implikationen. $\wedge$, $\vee$, $\neg$, J_F sind Verallgemeinerungen der entsprechenden Wahrheitstafeln der dreiwertigen Logik, wenn der Wahrheitswert U mit $\frac{1}{2}$ identifiziert wird; $\Rightarrow$ und $\rightsquigarrow$ sind weder Verallgemeinerung von $\rightarrow$ noch von $\supset$, da $p \Rightarrow q$ und $p \rightsquigarrow q$ den Wert 0 (d.h. F) erhalten, wenn p den Wert $\frac{1}{2}$ (d.h. U) und q den Wert 0 (d.h. F) erhält.

Wir geben jetzt die Bewertungsvorschriften für quantifizierte Formeln an.

$$(\forall v\ \phi)^J = \inf_{x \in I} \phi^{J_x^v},$$

$$(\exists v\ \phi)^J = \sup_{x \in I} \phi^{J_x^v}.$$

Dabei gibt I den Bereich der Variablen v an, und J_x^v ist die Interpretation, die mit J übereinstimmt, nur daß der Variablen v der Wert x zugeordnet wird.

Der Spielraum dafür, daß noch weitere Junktoren und z.B. auch vage Quantoren mit in eine formale Sprache der Fuzzy-Logik aufgenommen werden, ist natürlich sehr groß, da es wegen des überabzählbaren Bereiches der Wahrheitswerte dafür sehr viele Möglichkeiten gibt. Natürlich reichen die angegebenen Junktoren nicht aus, um dadurch alle überhaupt möglichen Junktoren auszudrücken; dazu würde man überabzählbar viele (!) Junktoren benötigen. Da die natürliche Sprache selbst nicht überabzählbar viele Aussagenverknüpfungen enthält, wird man diese funktionale Unvollständigkeit möglicherweise sogar begrüßen. Schwererwiegend ist jedoch, daß in einer derart einfachen formalen Sprache der Fuzzy-Logik die besonderen intuitiven Schlußweisen, durch die die Fuzzy-Logik vor anderen Systemen ausgezeichnet sein soll, gar nicht ausgedrückt werden können. Anzustreben wäre doch ein Ableitungskalkül, der es gestattet, von einem Satz wie (1) und

(11) *Hans ist groß.*

auf

(12) *Peter ist größer als Hans.*

zu schließen, wenn der Wahrheitswert von (1) größer ist als der von (11). In [8] wird darauf hingewiesen, daß dies durch die Erweiterung der Fuzzy-Logik um J-Operatoren geleistet werden könnte, wobei

$$J_k\, p =_{Df} \begin{cases} 1, \text{ fall } p^J = k, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Einbeziehung der J-Operatoren in die Fuzzy-Logik stellt eine erhebliche Spracherweiterung dar, denn in den ersten Ansätzen für eine Fuzzy-Logik wurde von diesen Operatoren höchstens J_0 (d. i. J_F) aufgenommen. Es muß also bereits ein erheblicher syntaktischer Aufwand betrieben werden, um Schlüsse, wie den von (1) und (11) auf (12) mit in das formale System einzubeziehen. Viel mehr als derartige magere Teilresultate sind jedoch nicht zu erwarten, denn in [8] wird nachgewiesen, daß es grundsätzlich keinen korrekten und vollständigen Ableitungskalkül für die Fuzzy-Logik mit J-Operatoren gibt, und dies gilt sogar schon für die Fuzzy-Aussagenlogik.

Zum Abschluß bringen wir noch eine Darstellung der Fuzzy-Aussagenlogik, in der eine Semantik benutzt wird, die vergleichbar ist mit der Kripke-Semantik für die Modallogik. (Ausgangspunkt für unsere Darstellung ist ein Bericht von G. Lakoff in [7] über einen entsprechenden Vorschlag von D. Scott. Da Lakoffs Version fehlerhaft ist und dadurch der eigentliche Zweck seiner Darstellung unklar bleibt, bringen wir hier eine Formulierung, von der wir glauben, daß sie genau das leistet, was von Scott intendiert war.) Ausgangspunkt ist eine formale Sprache der Fuzzy-Aussagenlogik mit den Aussagenkonstanten $p_0, p_1, p_2, \ldots$ und den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightsquigarrow$. Als Menge von "möglichen Welten" für eine intensionale Semantik dieser Sprache nehmen wir das Intervall $(0,1]$ von reellen Zahlen, d. i. die Menge aller reellen Zahlen i mit $0 < i \leqslant 1$. Die Zugänglichkeitsrelation auf der Menge der möglichen Welten ist die $\geqslant$-Relation. Eine intensionale Interpretation $\mathcal{J}$ von L ist dann eine Funktion, die jedem $i \in (0,1]$ eine Bewertungsfunktion $V_i^{\mathcal{J}}$ zuordnet, wobei $V_i^{\mathcal{J}}$ jeder Aussage α von L einen der Wahrheitswerte W oder F zuweist und den folgenden Rekursionsbedingungen genügt:

(a) für jede Aussagenkonstante p von L gibt es ein $k \in [0,1]$, so daß

$$V_i^{\mathcal{J}}(p) = \begin{cases} W, \text{ wenn } 0 < i \leqslant k, \\ F \quad \text{sonst,} \end{cases}$$

(b)

$$V_i^{\mathcal{J}}(\neg\ \alpha) = \begin{cases} F, \text{ wenn es ein } j \in (0,1] \text{ gibt mit } j > 1 - i \\ \quad \text{und } V_j^{\mathcal{J}}(\alpha) = W, \\ W \text{ sonst,} \end{cases}$$

(c)

$$V_i^{\mathcal{J}}(\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} W, \text{ wenn } V_i^{\mathcal{J}}(\alpha) = V_i^{\mathcal{J}}(\beta) = W \\ F \quad \text{sonst,} \end{cases}$$

(d)

$$V_i^{\mathcal{J}}(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} F, \text{ wenn } V_i^{\mathcal{J}}(\alpha) = V_i^{\mathcal{J}}(\beta) = F \\ W \text{ sonst,} \end{cases}$$

(e)

$$V_i^{\mathcal{J}}(\alpha \rightsquigarrow \beta) = \begin{cases} W, \text{ wenn für alle } j \in (0,1] \text{ gilt:} \\ \quad \text{wenn } V_j^{\mathcal{J}}(\alpha) = W, \text{ so } V_j^{\mathcal{J}}(\beta) = W, \\ F \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Erläuterung: (a) besagt, daß die Menge der i, für die $V_i^{\mathcal{J}}(p) = W$ ist, ein abgeschlossenes Anfangsstück von (0,1] ist, dabei sind auch die leere Menge und (0,1] selbst als Möglichkeit zugelassen. Wir bezeichnen $\{i \mid V_i^{\mathcal{J}}(p) = W\}$ auch als die Erfüllungsmenge von p bei $\mathcal{J}$. (b) zeigt, daß das Negationszeichen als echter modaler Operator aufgefaßt wird; wenn α die Erfüllungsmenge (0,k] hat, so hat $\neg\ \alpha$ die Erfüllungsmenge (0,1-k]. (c) und (d) drücken aus, daß $\wedge$ und $\vee$ extensional definiert werden, während die Bewertung von $\rightsquigarrow$ gemäß (e) in Analogie zu dem Notwendigkeitsoperator $\Box$ der modalen Logik gesehen werden kann.

Man prüft leicht nach, daß jede Aussage α eine Erfüllungsmenge der Gestalt (0,k] mit $k \in [0,1]$ hat und daß man eine fuzzy Interpretation von L erhält, wenn man α mit dem zugehörigen k bewertet. Es gilt also: Wenn $\mathcal{J}$ eine intensionale Interpretation von L ist, so ist J mit $\alpha^J =_{Df} \sup_{i \in (0,1]} V_i^{\mathcal{J}}(\alpha) = W$ eine fuzzy Interpretation von L, und jede fuzzy Interpretation von L läßt sich so gewinnen.

5. Unsere Analyse der verschiedenen Theorien zur Behandlung vager Prädikate in formalen Sprachen hat gezeigt, daß ohne eine Variation der Standardinterpretationen der natürlichsprachlichen Intuition nicht entsprochen werden kann. Wir haben dabei den Begriff der Interpretation sehr weit gefaßt und sind nicht näher auf etwaige Bestimmungskompo-

nenten eingegangen. In welcher Weise dies z.B. geschehen könnte, wird in der Zwei-Ebenen-Theorie einer Adjektivsemantik von M. Pinkal (vgl. [10]) dargelegt, auf die wir jetzt eingehen wollen. In dieser Theorie kommt das allgemeine Bewertungsverfahren, das stets zwei Komponenten enthält, sehr deutlich zum Ausdruck, da diese Komponenten hier klar getrennt werden. In der ersten Ebene werden klassische zweiwertige Interpretationen gewählt. In der zweiten Ebene erfolgt das, was wir als Variation der Standardinterpretationen bezeichnet haben, wobei die Art dieser Variation genauer analysiert wird. Variationsbestimmend sind reale Äußerungssituationen, zu denen jeweils ein Bündel von Kontexten gehört. In welcher Weise diese zweite Ebene der Bewertung Rückwirkungen auf die erste Ebene hat, hängt von der genauen Ausführung der Theorie ab. Möglich ist z.B. eine wechselseitige Beziehung, wie sie in der Supervaluationslogik mit Wahrscheinlichkeitskomponente vorliegt.

Ballweg/Frosch benutzen bei den von ihnen in [1] angegebenen Interpretationen für vage Prädikate ein Skalierungsverfahren, analog zu dem der Fuzzy-Logik, verleihen den Skalen jedoch keinen logischen Charakter. Komparativ und Positiv von Adjektiven können gemeinsam behandelt werden, wobei der Komparativ zu einer linearen Ordnung innerhalb eines Teils des Individuenbereichs führt und in diesem Sinne wie ein total spezifiziertes zweistelliges Prädikat behandelt wird. Die Vagheit des Positivs ergibt sich durch die Unspezifiziertheit von festzulegenden Schwellenwerten innerhalb der Ordnung. Wieder muß betont werden, daß es sich hierbei um ein theoretisches Konstrukt zur Nachzeichnung natürlichsprachlicher Bedeutungen handelt. Falsch wäre es z.B., wenn den ausgezeichneten Schwellenwerten in irgendeiner Form eine psychologische Bedeutung zugewiesen werden sollte. Eine Semantik, die für bestimmte Objekte das Zutreffen des Prädikates ... *ist ein Stuhl* festlegt, weil diese Objekte in der linearen Ordnung ... *ist stuhlartiger als* ... höher stehen als ein bestimmter Standard, braucht durch einen Sprachbenutzer nicht in der Form realisiert zu werden, daß er für seine Entscheidung die vorgelegten Objekte jeweils mit typischen Grenzfällen für Stühle vergleicht – eher wird er sie doch mit einem typischen Stuhl vergleichen.

Die Verfechter der Fuzzy-Logik sehen es hingegen für einen Vorzug ihrer Theorie an, daß sie sich auch psychologisch stützen läßt. Sicher ist nicht zu leugnen, daß es bei allen Prädikaten graduelle Abstufungen gibt und das läßt sich sicher durch Informantenbefragungen stützen. Ich stimme jedoch mit Ballweg/Frosch überein, daß dies noch keine Rechtfertigung für eine Fuzzy-Logik ist.

Ballweg/Frosch behandeln Positiv und Komparativ von Adjektiven gemeinsam, und ein solches Verfahren gehört auch zum Forderungskatalog von Pinkal. Ich meine überdies, daß eine adäquate Semantik für vage Prädikate keine dieser Adjektivformen einseitig bevorzugen sollte. In einer Aussage wie

(13) *Angela ist schöner als Barbara.*

ist meines Erachtens das zweistellige Prädikat ... *ist schöner als* ... nicht grundsätzlich mehr oder weniger vage als das einstellige Prädikat ... *ist schön* in der Aussage

(14) *Angela ist schön.*

Durch Aussagen wie (12) gegenüber (1) wird man leicht dazu verleitet, dem Komparativ grundsätzlich einen höheren Spezifikationsgrad zu verleihen. Häufig ist es natürlich so, daß dies dadurch gerechtfertigt werden kann, daß durch den Komparativ implizit eine Ordnungsstruktur vermittelt wird. Entscheidend für den Aufbau einer Semantik, die einerseits Unabhängigkeiten zwischen Positiv und Komparativ von Adjektiven hinsichtlich ihrer Vagheit respektiert und dennoch erfaßt, inwieweit sich die Bedeutungen gemeinsam ermitteln lassen, wird sein, ob man in der Lage ist, den Begriff der Standardinterpretation abzuklären und die Auswirkungen der Variation von Standardinterpretationen auf die einzelnen Bedeutungskomponenten zu überschauen. Ich meine, daß die Interpretation eines zweistelligen Prädikates wie ... *ist schöner als* ... in einer dreiwertigen Logik allenfalls zu einer Halbordnung führt, da der Wert "unbestimmt" hier für ordnungsmäßige Unvergleichbarkeit steht. Komparative tauchen auch in sog. Präferenzlogiken auf, und dann ist zweifelhaft, ob überhaupt noch eine Halbordnung vorliegt, da die Transitivität verletzt sein könnte.

(15) *Ich mag Hans lieber als Fritz und Fritz lieber als Peter und Peter lieber als Hans.*

Es wäre zu klären, ob (15) wahrheitsgemäß geäußert werden könnte, ohne daß sich innerhalb des Satzes der allgemeine Kontext oder die Interpretation der Ausdrücke ändert. Die durch einen Komparativ gegebene Struktur erscheint also bei genauerer Analyse durchaus nicht immer so einfach wie es durch verhältnismäßig unkomplizierte Adjektive wie *groß* nahegelegt wird. Demgemäß kann hier von einer zufriedenstellenden Lösung dieses Gesamtproblems noch bei keinem der Ansätze gesprochen werden.

Literatur

[1] Ballweg, J./Frosch, H., Probleme der semantischen Analyse vager Prädikate, in diesem Band.

[2] Blau, U., Die dreiwertige Logik der Sprache, Berlin 1978.

[3] Fine, K., Vagueness, truth and logic, in: Synthese 30, 1975.

[4] Goguen, J.A., The logic of inexact concepts, in: Synthese 19, 1969.

[5] Haack, S., Deviant Logic, Cambridge 1974.

[6] Kamp, H., Two theories about adjectives, in: E. Keenan (ed.), Formal semantics of natural language, Cambridge 1975.

[7] Lakoff, G., Hedges: a study on meaning criteria and the logic of fuzzy concepts, in: Peranteau, P.M. et al. (ed.); Chicago Linguistic Society 8, Chicago 1972.

[8] Morgan, Ch. G./Pelletier, F.J., Some notes concerning fuzzy logics, in: Linguistics and Philosophy 1, 1977.

[9] Oberschelp, A., Prinzipien des Aufbaus von Syntax und Semantik formaler Sprachen, in diesem Band.

[10] Pinkal, M., Adjektivsemantik, in diesem Band.

[11] Rieser, H., Prinzipien und Anspruch einer grammatischen Beschreibung natürlicher Sprachen mit Hilfe formaler Sprachen, in diesem Band.

[12] Rosser, J.B./Turquette, A.P., Many-valued logic, Amsterdam 1952.

[13] Todt, G., Logical problems with vague natural language predicates, Universität Kiel, erscheint demnächst.